ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

CONCOURS D'ENTRÉE 1991

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATH-TIQUES

DURÉE : 3 HEURES

Correction :

Partie I

1. (a) Soit λ une valeur propre de f_A. Montrons que $E_\lambda(A)$ est stable par f_B. Soit $x \in E_\lambda(A)$. Alors

$$(f_A - \lambda id_E)(f_B(x)) = f_A \circ f_B(x) - \lambda f_B(x) = f_B \circ f_A(x) - \lambda f_B(x) = f_B((f - \lambda \mathbf{Id}_E))(x) = f_B(0) = 0.$$

Donc $f_B(x) \in E_\lambda(A)$.

(b) Considérons l'application g_λ de $E_\lambda(A)$ dans $E_\lambda(A)$ qui, à $x \in E_\lambda$, associe $f_B(x)$. C'est un endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc il admet une valeur propre μ et il existe $x \neq 0 \in E_\lambda(A)$ tel que $g_\lambda(x) = f_B(x) = \mu x$. Or $x \in E_\lambda(A)$ donc $f_A(x) = \lambda x$. On a ainsi montré que f_A et g_A ont un vecteur propre commun.

(c) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les différentes valeurs propres de f_A, alors d'après ce qui précède, pour tout $1 \leq i \leq 3$, il existe un vecteur propre commun $v_i \neq 0$ à f_A et f_B (les $E_{\lambda_i}(A)$ sont des droites), donc il il existe des scalaires μ_1, μ_2, μ_3 tels que $f_B(v_i) = \mu_i v_i$ pour $1 \leq i \leq 3$. Donc les matrices de f_A et f_B dans la base (v_1, v_2, v_3) sont diagonales.

L'hypothèse que les valeurs propres de f_A sont différentes, est essentielle. En effet, la matrice identité commute avec toutes les matrices, y compris les non diagonalisables.

2. (a) • On peut vérifier facilement que les trois applications φ, ψ et u sont des endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. De plus si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(\psi(M)) = \varphi(MB) = AMB = \psi(AM) = \psi(\varphi(M)) = \psi \circ \varphi(M).$$

D'où $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, non nul tel que $\varphi(M) = \lambda M$. M étant non nul, il existe $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX_0 \neq 0$. Alors $(\varphi(M))(X_0) = AM(X_0) = \lambda M(X_0)$ et λ est valeur propre de φ. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe $X \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $AM = \lambda M$. Soit p un projecteur sur la droite $\mathrm{Vect}(M)$ parallèlement à un hyperplan supplémentaire H. Alors, $\forall N \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $p(N) \in \mathrm{Vect}(M)$, donc $\varphi(p(M)) = \lambda p(N)$. Ainsi, $\varphi(p) = \varphi \circ p = \lambda p$ et λ est valeur propre de φ. Donc, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi)$ et finalement, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(A)$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\psi)$ et $E_\lambda(\psi)$ le sous espace propre associé. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, non nul.

$$\begin{aligned}
M \in E_\lambda(\psi) &\Leftrightarrow \psi(M) = \lambda M \\
&\Leftrightarrow MB = \lambda M \\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \ MBX = \lambda MX \\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \ M(BX - \lambda X) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \ BX - \lambda X \in \ker M \\
&\Leftrightarrow \mathbf{Im}(B - \lambda \mathbf{I}_n) \subset \ker M
\end{aligned}$$

M n'étant pas nul, $\ker M \neq \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $\ker M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, de dimension inférieure ou égal à $n - 1$.

L'inclusion $\mathbf{Im}(B-\lambda\mathbf{I}_n)\subset\ker M$ implique que l'endomorphisme $f_B-\lambda\mathbf{Id}_E$ n'est pas injectif, c'est à dire que λ est valeur propre de f_B.
Réciproquement, si λ est valeur propre de B, $\mathbf{Im}(f_B-\lambda\mathbf{Id}_E)$ est un sous espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ strictement inclus dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et il existe une matrice M de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, nul sur $\mathbf{Im}(B-\lambda\mathbf{I}_n)$ et non identiquement nul (il suffit de le définir comme étant non nul sur un sous-espace supplémentaire de $\mathbf{Im}(B-\lambda\mathbf{I}_n)$). Une telle matrice M vérifie $\mathbf{Im}(B-\lambda\mathbf{Id}_E)\subset\ker M$, donc $\forall M\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $M(BX-\lambda X)=0$ et finalement $\psi(M)=MB=\lambda M$. Donc λ est valeur propre de ψ. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\psi)=\mathrm{Sp}(B)$.

Remarque : On peur remarquer que $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\psi(M)=MB$ si et seulement si, ${}^tB{}^tM=\lambda{}^tM$, d'où $\mathrm{Sp}(\psi)=\mathrm{Sp}({}^tB)=\mathrm{Sp}(B)$.

(b) X est une matrice colonne non nulle, ${}^tY$ est une matrice ligne non nulle. Leur produit $M=X{}^tY$ est donc une matrice carrée non nulle, et

$$AM=AX{}^tY=(AX){}^tY=\lambda X{}^tY$$

et

$$MB=X{}^tYB=X({}^tYB)=X\mu{}^tY=\mu X{}^tY.$$

On a donc trouvé une matrice $M=X{}^tY$ non nulle telle que $u(M)=AM-MB=(\lambda-\mu)X{}^tY$, et par conséquent $X{}^tY$ est un vecteur propre de u associé à $\lambda-\mu$.

(c) i. Soit $\beta\in\mathrm{Sp}(u)$ et $Y\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Par $u(M)=\beta M$, on a $AM-MB=\beta M$, donc $AM=M(\beta\mathbf{I}_n+B)$. Soit $k\in\mathbb{N}$, supposons $A^kM=M(\beta\mathbf{I}_n+B)^k$ et montrons que $A^{k+1}M=M(\beta I_n+B)^{k+1}$. Donc $A^{k+1}M=AA^kM=AM(\beta\mathbf{I}_n+B)^k=M(\beta\mathbf{I}_n+B)^{k+1}$.

ii. On a $A^kM=M(\beta\mathbf{I}_n+B)^k$ pour tout entier naturel k et par combinaison linéaire, on obtient $P(A)M=MP(\beta\mathbf{I}_n+B)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$.

iii. D'aprés le théorème de *Cayley-Hamilton*, $\chi_A(A)=0$ donc $M\chi_A(\beta\mathbf{I}_n+B)=0$. Comme M est une matrice non nulle, il en résulte que $\chi_A(\beta\mathbf{I}_n+B))$ est non inversible.
Or $\chi_A(\beta\mathbf{I}_n+B)=\prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}((\beta-\lambda)\mathbf{I}_n+B)^{\alpha_\lambda}$ n'est pas inversible implique qu'il existe $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ tel que $((\beta-\lambda)\mathbf{I}_n+B)^{\alpha_\lambda}$ n'est pas inversible et donc il existe $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ tel que $(\beta-\lambda)\mathbf{I}_n+B$ n'est pas inversible. Donc $\lambda-\beta\in\mathrm{Sp}\,B$ et par conséquent il existe $\mu\in\mathrm{Sp}(B)$ tel que $\lambda-\beta=\mu$ ou encore $\beta=\lambda-\mu$.

(d) D'après l'étude précédente, $\mathrm{Sp}\,(u)\subset\mathrm{Sp}\,(A)+\mathrm{Sp}\,(B)$.
Inversement, d'aprés la question 2.b on voit que $\mathrm{Sp}\,(u)\supset\mathrm{Sp}\,(A)-\mathrm{Sp}\,(B)$. D'où l'égalité :

$$\mathrm{Sp}(u)=\mathrm{Sp}(A)-\mathrm{Sp}(B).$$

D'autre part, on sait que u est inversible si, et seulement si, $0\notin\mathrm{Sp}(u)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(A)\cap\mathrm{Sp}(B)=\varnothing\Leftrightarrow 0\notin\mathrm{Sp}(u)\Leftrightarrow u$ est inversible.

(e) i. On trouve $\mathrm{Sp}(A)=\{-2,3,6\}$ et $\mathrm{Sp}(B)=\{0,2,3\}$. D'où :

$$\mathrm{Sp}(u)=\mathrm{Sp}(A)-\mathrm{Sp}(B)=\{-2,-4,-5,0,1,3,4,6\}.$$

En particulier, $\chi_u(X)=(X+2)(X+4)(X+5)X(X-1)(X-4)(X-6)(X-3)^2$.

ii. On remarque $E=\ker(u)=E_0(u)$ est une droite vectorielle (0 est d'ordre de multiplicité 1). D'après 2.b, si X est un vecteur propre de A associé à 3 et Y est un vecteur propre de B associé à 3, $X{}^tY$ est un vecteur propre de u associé à 0. Les calculs montre que $E_3(A)=\mathrm{Vect}(X)$ où ${}^tX=(1,-1,1)$ et $E_3(B)=\mathrm{Vect}(Y)$ où ${}^tY=(1,1,1)$, d'où :

$$E=\mathrm{Vect}(M)$$

où $M=X{}^tY=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
Toutes les matrices de E sont de rang 1, à l'exception de la matrice nulle, donc E ne contient pas des matrices inversibles.

iii. On a $AM = MB + 3M \Leftrightarrow u(M) = 3M$, donc l'ensemble de solutions de l'équation $AM = MB + 3M$ est $E_3(u)$. La valeur propre 3 de u est obtenue pour $\lambda \in \{3, 6\}$ et $\mu \in \{0, 3\}$. Or $E_3(A) = \mathrm{Vect}(X_1)$ où ${}^tX_1 = (1, -1, 1)$, $E_6(A) = \mathrm{Vect}(X_2)$ où ${}^tX_2 = (1, 2, 1)$, $E_0(B) = \mathrm{Vect}(Y_1)$ où ${}^tY_1 = (1, -2, 1)$ et $E_3(B) = \mathrm{Vect}(Y_2)$ où ${}^tY_2 = (1, 1, 1)$, donc $\mathrm{Vect}(X_1{}^tY_1, X_2{}^tY_2) \subset E_3(u)$. D'après les calculs

$$X_1{}^tY_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_2{}^tY_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont libres, donc l'ensemble de solutions de l'équation matricielle $AM = MB + 3M$ est $E_3(u) = \mathrm{Vect}(X_1{}^tY_1, X_2{}^tY_2)$.

iv. Le polynôme caractéristique de u est scindé (on ait dans $\mathbb{C}$) toutes les racines sont simples, sauf 3 qui est une racine double et comme $\dim E_3(u) = 2$, alors u est diagonalisable.

3. La famille $(X_i^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est formée par des vecteurs propres de u, pour montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable il suffit de montrer que c'est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Or elle est de cardinal n^2 égal à la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

En effet, $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}X_i^tY_j = 0$ implique $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^tZ_i = 0$ où $Z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j$, on multiplie cette égalité à droite par un Z_j où $1 \leq j \leq n$ fixe, mais quelconque, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_iX_i = 0$ où $a_i = {}^tZ_iZ_j$, or $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j = {}^tZ_jZ_j = \|Z_j\|_2^2 = 0$ et donc $Z_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Mais $Z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j$ pour tout $1 \leq i \leq n$ or $(Y_j)_{1\leq j\leq n})$ est aussi libre, donc $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

4. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Si $M^2 = A$ alors $AM = M^3 = MA$ et donc M et A commutent. A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir -2, 3 et 6. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres de A sont des droites. M commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A.
Ainsi, il existe une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de M ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D_0 alors pour la même matrice P, $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D. De plus

$$M^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Ce qui fournit huit solutions de l'équation matricielle $M^2 = A$.

Partie II

1. Pour tout nombre complexe λ, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\chi_A(\lambda) & = & \begin{vmatrix} \lambda-12+2i & 6+2i & -6-2i \\ 6+2i & \lambda-3+5i & 3+i \\ -6-2i & 3+i & \lambda-3+5i \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1+C_2-C_3 \\
& = & \begin{vmatrix} \lambda+6i & 6+2i & -6-2i \\ \lambda+6i & \lambda-3+5i & 3+i \\ -\lambda-6i & 3+i & -3+5i \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L2-L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\
& = & (\lambda+6i) \begin{vmatrix} 1 & 6+2i & -6-2i \\ 1 & \lambda-3+5i & 3+i \\ -1 & 3+i & -3+5i \end{vmatrix} \\
& = & (\lambda+6i) \begin{vmatrix} 1 & 6+2i & -6-2i \\ 0 & \lambda-9+3i & 9+3i \\ 0 & 9+3i & \lambda-9+3i \end{vmatrix} \\
& = & (\lambda+6i)\left[(\lambda-9+3i)^2-(9+3i)^2\right] \\
& = & (\lambda+6i)^2(\lambda-18)
\end{array}$$

D'où $\mathrm{Sp}(A)=\{-6i,18\}$.
Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre $-6i$. On doit résoudre $AX=-6iX$ et on trouve fois le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (12-2i)x-(6+2i)y+(6+2i)z & = & -6ix \\ -(6+2i)x+(3-5i)y-(3+i)z & = & -6iy \\ (6+2i)x-(3+i)y+(3-5i)z & = & -6iz \end{array}\right.$$

qui est équivalent à $2x-y+z=0$. Donc $E_{-6i}(A)$ est l'hyperplan d'équation $2x-y+z=0$, on obtient $E_{-6i}(A)=\mathrm{Vect}(V_1,V_2)$ où ${}^tV_1=(-1,0,2)$ et ${}^tV_2=(1,2,0)$.

Pour la valeur propre 18, on résout l'équation $AX=18X$ avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve le système qui s'écrit encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y \\ z & = & -y \end{array}\right.$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 18 est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur ${}^tV_3=(2,-1,1)$.

2. En développant par rapport à la première ligne, on obtient $\det P=6(bd-ac)$. Ainsi, P est inversible si, et seulement si, $bd\neq ac$.
On remarque que les deux premiers vecteurs colonnes C_1 et C_2 de P sont des vecteurs de l'hyperplan $2x-y+z$ définissant le sous-espace propre $E_{-6i}(A)$, le troisième colonne C_3 est un vecteur propre associé à 18. Donc P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la base de vecteurs propre de A, d'où :

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -6i & 0 & 0 \\ 0 & -6i & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

3. A étant diagonalisable, plus précisément $A=PDP^{-1}$, avec $D=\mathrm{diag}(-6i,-6i,18)$. Pour prouver l'existence d'une matrice M telle que $M^3=A$, l'idée est de d'abord faire la même chose avec D. Mais si

$$N=\begin{pmatrix} iw_1\sqrt[3]{6} & 0 & 0 \\ 0 & iw_2\sqrt[3]{6} & 0 \\ 0 & 0 & w_3\sqrt[3]{18} \end{pmatrix}$$

où $w_k\in\{1,j,j^2\}$ pour tout $k\in\{1,2,3\}$, alors on a $N^3=D$. Posons $M=PNP^{-1}$. Alors

$$M^3=PN^3P^{-1}=PDP^{-1}=A.$$

4. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable. A étant diagonalisable et vérifie $A = PDP^{-1}$, donc :

$$M^3 = A \Leftrightarrow M^3 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = D \Leftrightarrow \left(P^{-1}MP\right)^3 = D$$

Si on pose $N = P^{-1}MP$, alors M solution de (1) si, et seulement si, $N^3 = D$.

On pose $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, donc

$$ND = DN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Donc nécessairement $a_{13} = a_{32} = a_{31} = a_{32} = 0$, $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ est donc M est semblable à une matrice de type précédent.

(b) Puisque $N^3 = D$, alors $B^3 = -6i\mathbf{I}_2$, donc $\mathrm{Sp}(B)$ est contenu dans l'ensemble des racines troisième de $-6i$. La factorisation du polynôme $X^3 + 6i = (X - w)(X - wj)(X - wj^2)$, où w est une racine cubique de $-6i$, entraîne $(B - w\mathbf{I}_2)(B - wj\mathbf{I}_2)(B - wj^2\mathbf{I}_2) = 0$.

(c) L'un des facteurs dans le produit $(B - w\mathbf{I}_2)(B - wj\mathbf{I}_2)(B - wj^2\mathbf{I}_2) = 0$ est nécessairement non injectif, donc l'une des valeurs w, wj ou wj^2 est une valeur propre de B.

La matrice B est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc elle est diagonalisable. Ainsi, N est diagonalisable et M serait semblable à une matrice diagonale, donc diagonalisable ce qui est absurde.

• • • • • • • • • • •